**2022年全国硕士研究生招生考试数学二**

**一、选择题：1~10小题,每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

1. 当时，，是非零无穷小量，给出以下四个命题：

①若，则；

②若，则；

③若，则；

④若，则，

其中所有真命题的序号是( ).

A. ①② B. ①④ C. ①③④ D. ②③④

【答案】D.

【解析】取，，排除①，故选D.

2. 

A.  B.  C.  D. 

【答案】D.

【解析】交换积分次序后可得

 

3. 设函数在处有2阶导数,则

A.当在的某邻域内单调增加时,

B.当时,在的某邻域内单调增加

C.当在的某邻域内是凹函数时,

D.当,在的某邻域内是凹函数

【答案】B.

【解析】因在处有阶导数，则

存在，

当时，由极限的局部保号性得，，当，有，即，当，有，故在的某邻域内单调增加，选B..

4. 设函数连续，令，则( ).

A. ， B. ，

C. ， D. ，

【答案】C.

【解析】由于

，

故

，

，

进而，，故选C.

5. 设为常数,若反常积分收敛,则的取值范围是( )

A.  B.  C.  D. 

【答案】A

【解析】当时,发散,排除B和D;当时, ,,发散, 排除C.故选A.

6. 设，则（ ）

A．若存在，则存在.

B．若存在，则存在.

C．若存在且存在，则不一定存在.

D．若存在且存在，则不一定存在.

【答案】D.

【解析】对选项A，B,若 ，均存在，但不存在，故排除A，B,.

对于选项C，由于函数在区间单调增加且连续，故存在时，一定存在，选项C错误，故选D.

7. , , ,则

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A.

【解析】由于， 所以

，

8. 设为三阶矩阵，，则的特征值为的充分必要条件是( ).

A.存在可逆矩阵，使得 B.存在可逆矩阵，使得

C. 存在正交矩阵，使得 D.存在可逆矩阵，使得

【答案】B.

【解析】相似矩阵有相同的特征多项式，因此特征值相同，这里的特征值为，若与相似则二者的特征值相同，相似即存在可逆矩阵，使得.

 若的特征值为，由于为三阶矩阵，因此可以相似对角化为，与相似.

9. 设矩阵，，则线性方程组解的情况为( ).

A.无解 B.有解 C.有无穷多解或无解 D.有唯一解或无解

【答案】D.

【解析】考虑增广阵.

若且，则，线性方程组无解；

若且，则，线性方程组无解.

若且，则，线性方程解唯一，对称的有

且，则，线性方程解唯一.

10. 设，若与等价，则( ).

A. B.

C. D.

【答案】C

【解析】由于

，

.

当时，，此时与等价.

当时，,与不等价.当时，,与不等价.因此当或时，与不等价等价，所以的取值范围为

.

**二、填空题：11~16小题,每小题5分,共30分.请将答案写在答题纸指定位置上.**

11．极限\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】原式.

12. 已知函数由方程确定,则\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】.

【解析】由已知可得.

方程两端对求导得，代入得.

方程两端对求导得，代入，得.

13. \_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】





.

14．微分方程 的通解\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】.

【解析】对应的特征方程为,求解可得,故微分方程的通解为.

15． 已知曲线的极坐标方程为, 则围成的有界区域的面积为\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】 .

【解析】面积

16. 设为3阶矩阵，交换的第二行和第三行，再将第二列的倍加到第一列，得到矩阵，则的迹\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】设按照上述初等变换的逆变换将的第二列的1倍加到第一列，然后交换的二,三行位置，得到，于是,因此.

**三、解答题：17~22小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（本题满分10分）

已知在处可导，且求.

【解】由可得

 ,
即又因为

 
故

18. 设是微分方程满足的解.求曲线的弧长.

【解】由可得

 ,
其中为任意常数.又由，代入上式有

 .

那么在上的弧长为

 

19. 设，求二重积分.

解：























20. （本题满分12分）

已知可微函数满足,且.

（1）记.求；

（2）求的表达式和极值.

【解析】（1）.

(2) 因为，

由可得

 ,

故

令，有

 
又因为

 

得

又因为

 

当时，，故是极小值点，极小值，

当时，，故不是极值点.

21. （本题满分12分）

设在上有二阶连续导数，证明：的充要条件是对任意的实数，有.

证明：“”令，则.









由于，所以单增，从而，故，单调递减.

,,则，及.

“” ，取，其中，则

,

从而

.

由





，

同时由极限的保号性知.

22.（本题满分12分）

已知二次型.

(1)求正交变换，使得化为标准形

(2)证明：.

【解】(1)据题意，二次型对应的矩阵.

由，

得的特征值为.

当时，解.由

，

得对应的特征向量为.

当时，解.由

，

得对应的特征向量和.

已互相正交，故只需将其单位化，得

，，.

令，经正交变换，将化为标准形.

(2)由(1)得，，而

，

故.

因此，.