**2022年全国硕士研究生招生考试数学三**

**一、选择题：1~10小题,每小题5分，共50分.在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是最符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.**

1. 当时，，是非零无穷小量，给出以下四个命题：

①若，则；

②若，则；

③若，则；

④若，则，

其中所有真命题的序号是( ).

A. ①② B. ①④ C. ①③④ D. ②③④

【答案】D.

【解析】取，，排除①，故选D.

2.已知，则( ).

A. 有最大值，有最小值 B. 有最大值，没有最小值

C. 没有最大值，有最小值 D. 没有最大值，没有最小值

【答案】

【解析】当为偶数时，

；

当为奇数时，；

3.设函数连续，令，则( ).

A. ， B. ，

C. ， D. ，

【答案】C.

【解析】由于

，

故

，

，

进而，，故选C.

4. 设, , ，则

A.  B. 

C.  D. 

【答案】A.

【解析】由于， 所以

，

5. 设为三阶矩阵，，则的特征值为的充分必要条件是( ).

(A)存在可逆矩阵，使得 (B)存在可逆矩阵，使得

(C) 存在正交矩阵，使得 (D)存在可逆矩阵，使得

【答案】(B)

【解析】相似矩阵有相同的特征多项式，因此特征值相同，这里的特征值为，若与相似则二者的特征值相同，相似即存在可逆矩阵，使得.

若的特征值为，由于为三阶矩阵，因此可以相似对角化为，与相似.

6. 设矩阵，，则线性方程组解的情况为( ).

(A)无解 (B)有解 (C)有无穷多解或无解 (D)有唯一解或无解

【答案】(D)

【解析】考虑增广阵.

若且，则，线性方程组无解；

若且，则，线性方程组无解.

若且，则，线性方程解唯一，对称的有

且，则，线性方程解唯一.

若且，则，线性方程组无解，对称的有

且，则，线性方程组无解.

因此线性方程组有唯一解或无解

7. 设，若与等价，则( ).

A. B.

C. D.

【答案】C

【解析】由于

，

.

当时，，此时与等价.

当时，,与不等价.当时，,与不等价.因此当或时，与不等价等价，所以的取值范围为

.

8. 设随机变量，随机变量，且与不相关，则( ).

A. B. C. D.

【答案】D.

【解析】由题知，，，则

,

因为与不相关，故



故选D.

9. 设随机变量序列独立同分布，且的概率密度为

则当时，依概率收敛于( ).

(A)  (B)  (C)  (D) 

【答案】(B)

【解析】由已知随机变量序列独立同分布，则亦独立同分布，根据辛钦大数定律，当时，依概率收敛于.

，

故选(B).

10. 设二维随机变量的概率分布为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |
|  |  |  |  |

若事件与事件相互独立，则( ).

A. B. C. D.

【答案】B.

【解析】令事件，事件，则

，

，



由于事件与事件相互独立，故，即

，

由分布律的性质可知

，

综上，解得，，则的概率分布为

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

，，



，

故选B.

**二、填空题：11~16小题,每小题5分,共30分.请将答案写在答题纸指定位置上.**

11．极限\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】原式.

12. 积分\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

13. 已知函数，则\_\_\_\_\_\_\_\_

【解析】由于为周期为的偶函数，求导不改变周期，只改变奇偶性，故为周期为的奇函数，所以.

14.已知函数 则\_\_\_\_\_\_\_\_.

【解析】由题可得积分区域

，

.

15. 设为3阶矩阵，交换的第二行和第三行，再将第二列的倍加到第一列，得到矩阵，则的迹\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】设按照上述初等变换的逆变换将的第二列的1倍加到第一列，然后交换的二,三行位置，得到，于是,因此

16. 设满足互不相容，互不相容，相互独立，，则\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.

【答案】

【解析】由题知，，，,

所求概率由条件概率公式得：









，

将，代入得

.

**三、解答题：17~22小题,共70分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.**

17.（本题满分10分）

设满足求渐近线.

【解析】由题意可得

.

又，有故

.

设的渐近线方程为，





因此的斜渐近线为.

18.（本题满分12分）

设某产品的产量由资本投入量和劳动投入量决定，生产函数为，该产品的销售单价与的关系为,若单位资本投入和单位劳动投入的价格分别为和，求利润最大时的产量.

【解析】利润



于是由



得驻点为， 此时.

在实际问题中由于驻点唯一，故利润在处取得最大值

19.（本题满分12分）

设 求二重积分.

【解析】









.

20.（本题满分12分）

求幂级数的收敛域及和函数.

【解】由

,

可得收敛区间.

当时，因为收敛，所以所求收敛域为.

令则有

.

.

综上所求和函数

.21.（本题满分12分）

21. （本题满分12分）

已知二次型.

(1)求正交变换，使得化为标准形

(2)证明：.

【解】(1)据题意，二次型对应的矩阵.

由，

得的特征值为.

当时，解.由

，

得对应的特征向量为.

当时，解.由

，

得对应的特征向量和.

已互相正交，故只需将其单位化，得

，，.

令，经正交变换，将化为标准形.

(2)由(1)得，，而

，

故.

因此，.

22.（本题满分12分）

设是来自期望为的指数分布的简单随机样本，是来自期望为的指数分布的简单随机样本，且相互独立，求的最大似然估计量，及.

【解析】由已知,,

所以总体,，从而可得

 

设为样本的观测值，且样本相互独立，则似然函数为



当时，似然函数两边取对数

，

令，解得，

故的最大似然估计量为.

由,，则，

则.